ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В.И.ЛЕНИНА

серия I "математика, физика, механика"

N 943-78 Деп.

УДК 519.853

А.Я.Кругер

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ НЕВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Минск - 1978

ВВЕДЕНИЕ

Характерной чертой различных подходов к выводу необходимых условий экстремума в задачах оптимизации является применение некоторых аппроксимаций множеств и функций, входящих в постановки задач. Вывод необходимых условий основывается при этом на применении к аппроксимирующим множествам или (если последние невыпуклы) к их выпуклым подмножествам теоремы отделимости. Во многих случаях удается выделить два различных типа аппроксимаций, которые оказываются в определенном смысле взаимно дополняющими. Так, в [4] имеем запрещенные вариации функционала и вариации, допустимые по ограничениям типа неравенства, с одной стороны, и вариации, допустимые по ограничениям типа равенства, с другой; в [12,32] - внутренний конус и аппроксимацию первого порядка.

В настоящей работе на примере задачи нелинейного программирования в нормированном пространстве с ограничениями, заданными произвольным множеством и конечным числом неравенств, предлагается общая схема получения и применения подобных аппроксимаций. В качестве важных частных случаев эта схема содержит формализм Дубовицкого-Милютина [4], а также результаты Нойштадта [29,33], Халкина [24,26], Кларка [21] и другие (см. § 4). Доказанные в § 2 общие необходимые условия экстре-

© ВИНИТИ, 1978

мума формулируются через выпуклые аппроксимации параметров задачи и по форме напоминают условия Куна-Таккера выпуклого программирования. При некоторых дополнительных предположениях эти условия можно сформулировать через субдифференциалы аппроксимирующих функций и полярный конус к выпуклому множеству, аппроксимирующему нефункциональное ограничение задачи (см. § 3). Близкие понятия вводятся в работе Пшеничного [I4] . Отметим, что возможен принципиально другой подход к выводу необходимых условий экстремума, основанный на непосредственном построении аналогов субдифференциалов для невыпуклых функций и нормальных конусов к невыпуклым множествам (см. [8,I0,II,27,28,I,37]).

Все построения и результаты данной работы нетрудно перенести на случай произвольного линейного топологического пространства.

§ I. Постановка задачи

Пусть G - множество в действительном линейном нормированном пространстве X, а φ_i, $i=0,1,\dots,m$, - некоторые функции на X (как и в [5] под функциями понимаются отображения в расширенную вещественную прямую $[-\infty,\infty]$). Рассматривается следующая задача (А): минимизировать φ_0 на множестве $x\in X$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\varphi_i(x)\le 0,\quad i=1,2,\dots,m, \tag{I}$$

$$x\in G. \tag{2}$$

Точку x_0, доставляющую функции φ_0 конечный локальный минимум при ограничениях (I), (2), назовем решением задачи (А).

Задача (А) - есть задача нелинейного программирования с

ограничениями типа неравенств, К ней могут быть сведены различные задачи оптимизации. Сама задача (А) может быть, очевидно, сведена к некоторой задаче безусловной минимизации. Однако, выделение в явном виде ограничений (I),(2) позволяет подчеркнуть специфику ограничений типа неравенства, а также связано с принципиально разной ролью, которую при выводе необходимых условий экстремума играют ограничения (I) и нефункциональное ограничение (2). Можно считать, что ограничения типа равенства заключены в (2), либо учтены в определении функций φ_i, $i=0,1,\dots,m$, для которых допускается значение $+\infty$. Подобно [25] в предлагаемую ниже схему вывода необходимых условий экстремума можно внести некоторые изменения, которые позволят учитывать ограничения типа равенства в явном виде.

В случае, когда функции φ_i, $i=0,1,\dots,m$, и множество G выпуклы, условия экстремума в задаче (А) устанавливаются известной теоремой Куна-Таккера (см., например, [5]). В настоящей работе эти условия обобщаются на случай произвольных функций φ_i, $i=0,1,\dots,m$, и множества G.

§ 2. Основной результат

Введем вначале некоторые определения.

Пусть $z\in X$. Через $Q(z)$ обозначим совокупность последовательностей $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$, элементами которых являются пары, составленные из положительного числа и точки пространства X, удовлетворяющих следующему условию: $x_k\to 0$, $\alpha_k x_k\to z$ при $k\to\infty$. Очевидно, $Q(z)\neq\emptyset$. Если $z\neq 0$, то необходимо $\alpha_k\to\infty$. Будем считать, что для каждого $z\in X$ задано непустое подмножество $\tilde{Q}(z)\subset Q(z)$.

Пусть $G\subset X$, $x_0\in X$. Введем два множества:

$\tilde{T}(x_0|G) = \{ z \in X$: найдется последовательность $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(z)$, такая, что $x_0 + x_k \in G$, $k=1,2,\ldots\}$,

$\tilde{I}(x_0|G) = \{ z \in X$: если $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(z)$, то $x_0 + x_k \in G$, начиная с некоторого номера$\}$, которые назовем обобщенными соответственно касательным и внутренним множествами к множеству G в точке x_0.

Ясно, что $\tilde{T}(x_0|G) = \tilde{I}(x_0|G) = \emptyset$, если $x_0 \notin clG$ (clG – замыкание множества G). Введенные множества представляют собой некоторые аппроксимации множества G в окрестности точки x_0, конкретный вид которых зависит от выбора множеств $\tilde{Q}(z)$, $z \in X$. Если $\tilde{Q}(z) = Q(z)$, $z \in X$, то $\tilde{T}(x_0|G)$ есть широко распространенный в задачах оптимизации касательный конус [4,36], а $\tilde{I}(x_0|G)$ – внутренний конус [4,12,32] (конус внутренних направлений) к множеству G в точке x_0. Обозначим их соответственно $T(x_0|G)$ и $I(x_0|G)$. $T(x_0|G)$ – непустой замкнутый конус в пространстве X, а $I(x_0|G)$ – открытый конус, возможно пустой (для того, чтобы $I(x_0|G) \neq \emptyset$ необходимо, чтобы множество G имело непустую внутренность). Эквивалентные определения и некоторые свойства касательного и внутреннего конусов можно найти в [9,17,18]. При другом выборе набора множеств $\tilde{Q}(z)$, $z \in X$, можно получить и другие аппроксимации множеств (см. § 4). При этом многие важные свойства касательного и внутреннего конусов сохраняются и для множеств $\tilde{T}(x_0|G)$ и $\tilde{I}(x_0|G)$. Справедливы следующие простые утверждения.

<u>Предложение I.</u> (а) $\tilde{I}(x_0|G) \subset \tilde{T}(x_0|G)$.

(в) Если $G_1, G_2 \subset X$, $G_1 \subset G_2$ то

$$\tilde{I}(x_0|G_1) \subset \tilde{I}(x_0|G_2), \quad \tilde{T}(x_0|G_1) \subset \tilde{T}(x_0|G_2).$$

Предложение 2. $\tilde{I}(x_0|G) = C\tilde{T}(x_0|CG)$, где CA – дополнение множества A в X.

Предложение 3. Пусть $G_1, G_2 \subset X$. Тогда

$$\tilde{T}(x_0|G_1 \cap G_2) \subset \tilde{T}(x_0|G_1) \cap \tilde{T}(x_0|G_2),$$
$$\tilde{I}(x_0|G_1 \cap G_2) = \tilde{I}(x_0|G_1) \cap \tilde{I}(x_0|G_2),$$
$$\tilde{T}(x_0|G_1 \cup G_2) = \tilde{T}(x_0|G_1) \cup \tilde{T}(x_0|G_2),$$
$$\tilde{I}(x_0|G_1 \cup G_2) \supset \tilde{I}(x_0|G_1) \cup \tilde{I}(x_0|G_2).$$

Предложение 4. Пусть множества $\tilde{Q}(z)$, $z \in X$, удовлетворяют следующему условию: если $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(z)$, то $\{\alpha_k, \lambda x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(\lambda z)$ для всех $\lambda > 0$, $z \in X$. Тогда $\tilde{T}(x_0|G)$ и $\tilde{I}(x_0|G)$ – конуса в пространстве X.

Рассмотрим теперь некоторую функцию φ на X, конечную в точке x_0. При каждом $z \in X$ свяжем с ней множество

$$\tilde{D}(\varphi, x_0)(z) = \Big\{ \gamma \in [-\infty, \infty] : \gamma = \lim_{k \to \infty} \alpha_k (\varphi(x_0 + x_k) - \varphi(x_0)),$$
$$\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(z) \Big\}.$$

Определим функции

$$\tilde{D}^{в}(\varphi, x_0)(z) = \begin{cases} \sup \tilde{D}(\varphi, x_0)(z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{D}^{н}(\varphi, x_0)(z) = \begin{cases} \inf \tilde{D}(\varphi, x_0)(z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

которые назовем соответственно верхней и нижней обобщенными производными функции φ в точке x_0 по направлениям. Подобно введенным выше аппроксимациям множеств эти функции аппроксимируют некоторым образом функцию φ в окрестности точки x_0. В случае $\tilde{Q}(z) = Q(z)$, $z \in X$, они называют-

ся полупроизводными (верхней и нижней) функции φ в точке x_0 по направлениям [7,14,34]. Будем обозначать их соответственно $D^в(\varphi,x_0)$ и $D^н(\varphi,x_0)$. В этом случае, как нетрудно установить, для всех $z\neq 0$ справедливы представления:

$$D^в(\varphi,x_0)(z)=\limsup_{t\to+0;\,y\to z}(\varphi(x_0+ty)-\varphi(x_0))/t, \tag{3}$$

$$D^н(\varphi,x_0)(z)=\liminf_{t\to+0;\,y\to z}(\varphi(x_0+ty)-\varphi(x_0))/t.$$

Обобщенные производные по направлениям оказываются тесно связанными с введенными выше аппроксимациями множеств. Введем обозначения: $A=\{x\in X:\varphi(x)\leq 0\}$, $B=\{x\in X:\varphi(x)<0\}$, $E=epi\,\varphi=$ $=\{(\mu,x)\in R\times X:\varphi(x)\leq\mu\}$ (надграфик функции φ).

<u>Предложение 5</u>. Пусть $\varphi(x_0)=0$. Тогда

$$\tilde{T}(x_0|A)\subset\{z\in X:\tilde{D}^н(\varphi,x_0)(z)\leq 0\},$$

$$\tilde{T}(x_0|B)\supset\{z\in X:\tilde{D}^в(\varphi,x_0)(z)<0\}.$$

<u>Предложение 6</u>. Пусть $z\in X$, $z\neq 0$. Тогда

$$\tilde{D}^в(\varphi,x_0)(z)=\inf\{\mu\in R:(\mu,z)\in\tilde{T}(\varphi(x_0),x_0|E)\},$$

$$\tilde{D}^н(\varphi,x_0)(z)=\inf\{\mu\in R:(\mu,z)\in\tilde{T}(\varphi(x_0),x_0|E)\}.$$

<u>Предложение 7</u>. Пусть выполнены условия предложения 4. Тогда $\tilde{D}^н(\varphi,x_0)$ и $\tilde{D}^в(\varphi,x_0)$ - положительно однородные функции.

Последнее утверждение вытекает непосредственно из предложения 4 в силу предложения 6. Аналогично можно перенести на обобщенные производные по направлениям и другие результаты, сформулированные для обобщенных касательного и внутреннего множеств. Следующее утверждение устанавливает связь между аппроксимациями множеств и функций, отвечающих различным наборам множеств $\tilde{Q}(z)$, $z\in X$.

Предложение 8. Пусть $\tilde{Q}_1(z) \subset \tilde{Q}_2(z) \subset Q(z)$, $z \in X$.

Тогда

$$\tilde{T}_1(x_0|G) \subset \tilde{T}_2(x_0|G),$$
$$\tilde{I}_1(x_0|G) \supset \tilde{I}_2(x_0|G),$$
$$\tilde{D}_1^н(\varphi, x_0)(z) \geq \tilde{D}_2^н(\varphi, x_0)(z), \quad z \in X,$$
$$\tilde{D}_1^в(\varphi, x_0)(z) \leq \tilde{D}_2^в(\varphi, x_0)(z), \quad z \in X,$$

где аппроксимации $\tilde{T}_1, \tilde{I}_1, \tilde{D}_1^н, \tilde{D}_1^в$ соответствуют набору множеств $\tilde{Q}_1(z)$, $z \in X$, а $\tilde{T}_2, \tilde{I}_2, \tilde{D}_2^н$ и $\tilde{D}_2^в$ – набору $\tilde{Q}_2(z)$, $z \in X$.

Воспользовавшись введенными выше определениями, сформулируем теперь необходимые условия экстремума в задаче (А). Пусть x_0 – решение задачи (А). Обозначим через J совокупность индексов из множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, отвечающих ограничениям типа неравенства, активным в точке x_0 (i-тое ограничение типа неравенства называется активным в точке x_0, удовлетворяющей ограничениям задачи, если $\varphi_i(x_0) = 0$). Условимся считать, что $0 \cdot \infty = 0$.

Теорема I.

(a) Пусть выпуклое множество M и выпуклые функции Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, удовлетворяют следующим условиям:

$$M \subset \tilde{T}(x_0|G), \tag{4}$$

$$\Phi_i(z) \geq \tilde{D}^в(\varphi_i, x_0)(z), \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{5}$$

для всех $z \in X$.

($в$) Предположим, кроме того, что для всех $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus J$ выполнено условие

$$\varphi_i(x) < 0, \quad x \in U,$$

где U – некоторая окрестность точки x_0. Тогда существуют

такие не равные одновременно нулю неотрицательные числа λ_i, $i=0,1,\dots,m$, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i(z) \geq 0, \ z \in M, \tag{6}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x_0) = 0, \ i=1,2,\dots,m. \tag{7}$$

Если найдется такая точка $\bar{z} \in M$, что $\Phi_i(\bar{z}) < 0, \ i \in J$, то $\lambda_0 \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Так как x_0 – решение задачи (А), имеем:

$$\{x \in X : \varphi_i(x) < 0, \ i=1,2,\dots,m, \ \varphi_0(x) < \varphi_0(x_0), x \in G \cap V\} = \emptyset,$$

где V – некоторая достаточно малая окрестность точки x_0. Воспользовавшись теперь предложениями I–3,5, заключаем, что система

$$\tilde{D}^{\ell}(\varphi_i, x_0)(z) < 0, \ i \in J \cup \{0\}; \ z \in \tilde{T}(x_0 | G)$$

несовместна. Предположим для простоты, что $J = \{1,2,\dots,\ell\}$, где $0 \leq \ell \leq m$ (в случае $\ell = 0$ считаем, что $J = \emptyset$). Рассмотрим в пространстве $R^{\ell+1}$ множество $\Omega = \{\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\ell) : \exists z \in M$, что $\mu_i \geq \Phi_i(z), \ i=0,1,\dots,\ell\}$. Множество Ω, очевидно, выпукло и по доказанному $0 \notin \operatorname{int} \Omega$. Применяя к выпуклым множествам Ω и $\{0\}$ в $R^{\ell+1}$ теорему отделимости, устанавливаем, что существуют такие не равные одновременно нулю числа λ_i, $i=0,1,\dots,\ell$, что

$$\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i \Phi_i(z) \geq 0, \ z \in M; \ \lambda_i \geq 0, \ i=0,1,\dots,\ell.$$

Полагая теперь $\lambda_i = 0$ для $i=\ell+1,\dots,m$, получаем первое утверждение теоремы. Справедливость второго утверждения очевидна.

§ 3. Некоторые замечания

1. Доказанная теорема устанавливает необходимые условия экстремума в общей задаче нелинейного программирования с ограничениями типа неравенства. Полученный результат по форме напоминает условия Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования. В его формулировке участвуют функции $\Phi_i, i=0,1,\dots,m$, и множество M, которые условиями теоремы определяются, вообще говоря, неоднозначно. Они представляют собой некоторые выпуклые аппроксимации параметров рассматриваемой задачи (А) вблизи точки x_0 - решения задачи. Тем самым, теорема 1 есть некоторый аналог абстрактного принципа максимума (правила множителей) Нойштадта и Халкина [13,24,26,29,33].

Применяя различные выпуклые аппроксимации (функции Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, и множество M), а также различные способы аппроксимации (набор множеств $\tilde{Q}(z)$, $z\in X$), из теоремы 1 можно получить систему необходимых условий экстремума для задачи (А).

Если множества $\tilde{Q}(z)$, $z\in X$, удовлетворяют условиям предложения 4, то всегда можно считать, что в условиях теоремы 1 множество M представляет собой выпуклый конус с вершиной в нуле, а Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, - выпуклые положительно однородные функции такие, что $\Phi_i(0)=0$, $i=0,1,\dots,m$. Действительно, если множество M и функции Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, удовлетворяют условиям (4),(5), то при сделанных предположениях этим условиям будут удовлетворять и множество

$$\tilde{M}=\{z\in X:\ z=\lambda x,\ \lambda\geq 0,\ x\in M\}\ -$$

конус, порожденный множеством M, и функции $\tilde{\Phi}_i, i=0,1,\dots,m$, надграфики которых представляют собой конуса, порожденные в

пространстве $R\times X$ надграфиками соответствующих функций Φ_i, $i=0,1,\dots,m$. При этом, очевидно, $\tilde{M}\supset M$, $\tilde{\Phi}_i(z)\le\Phi_i(z)$, $z\in X$, $i=0,1,\dots,m$.

2. Как и в [24,26,29,33] при некоторых дополнительных предположениях можно получить усиление неравенства (6) в утверждении теоремы I.

Пусть $0\in M$, $\Phi_i(0)=0$, $i=0,1,\dots,m$ (При выполнении условий предложения 4 это предположение, как отмечалось выше, не ограничивает общности). Тогда условие (6) в утверждении теоремы может быть переписано в следующей "субдифференциальной" форме [5,9,15,35]:

$$0\in\partial\Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\Phi_i+\delta(\cdot\,|\,M)\Big)(0), \tag{8}$$

где

$$\delta(x|M)=\begin{cases}0, & x\in M,\\ \infty, & x\notin M,\end{cases}$$

— индикаторная функция множества M. Если теперь предположить, что функции Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, непрерывны в некоторой точке множества M, то последнее условие эквивалентно следующему [5,9,35]:

$$0\in\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\,\partial\Phi_i(0)+M^*. \tag{9}$$

Здесь $M^*=\{x^*\in X^*:\ \langle x^*,x\rangle\le 0,\ x\in M\}$ — полярный (сопряженный) конус [4,5,13,15,18] к выпуклому множеству M (X^* — пространство, топологически сопряженное к X, а символ $\langle x^*,x\rangle$ обозначает значение линейного функционала x^* на элементе $x\in X$). Условие (9) означает, что найдутся такие линейные непрерывные функционалы

x_i^*, $i=0,1,\dots,m$, что для каждого $i\in\{0,1,\dots,m\}$

$$\langle x_i^*, z\rangle \le \Phi_i(z),\ z\in X, \tag{10}$$

и справедливо неравенство:

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle x_i^*, z\rangle \ge 0,\ z\in M. \tag{11}$$

Отметим, что множество $x^*\in X^*$, удовлетворяющих (10) (субдифференциал выпуклой функции Φ_i в нуле), можно принять в качестве некоторого обобщения субдифференциала невыпуклой функции φ_i в точке x_0 .

В случае $X=R^n$ условие (9) (или совокупность условий (10),(11)) будет следовать из (8) и при более слабом предположении [15] :

$$\bigcap_{i=0}^{m} ri(dom\,\Phi_i)\cap ri\,M\ne\emptyset,$$

где riM - относительная внутренность (внутренность относительно аффинной оболочки [15]) множества M , а $dom\,\Phi=\{z\in X:\ \Phi(z)<\infty\}$ - эффективная область [5,15] функции Φ .

Другие условия, достаточные для перехода от (8) к (9) можно найти в [35] .

3. Нетрудно установить, что теорема I останется справедливой, если в её формулировке выпуклость функций Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, и выполнение неравенств (5) требовать лишь для $z\in M$. Кроме того, функции Φ_i можно вводить только для $i\in J\cup\{0\}$ (для $i\in\{1,2,\dots,m\}\setminus J$ можно, например, положить $\Phi_i(z)\equiv 0$). Условие (6) теоремы I также можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы, начиная с некоторого номера, $\varphi_i(x_0+x_k)<0$, $i\in\{1,2,\dots,m\}\setminus J$,

если $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \tilde{Q}(z), \quad z \in \tilde{T}(x_0 | G)$.

4. Теорема I допускает следующее обобщение. Пусть в определении множеств $Q(z), z \in X$, сходимость последовательностей $\{\alpha_k x_k\}_{k=1}^{\infty}$ к z понимается в слабой топологии пространства X. Тем самым для каждого $z \in X$ в множество $Q(z)$ дополнительно включается (если пространство X не является конечномерным) некоторое непустое множество последовательностей, что расширяет возможности построения аппроксимаций множеств и функций по схеме § 2. Нетрудно установить, что теорема I остается в силе. Сохраняются также все утверждения § 2 относительно свойств аппроксимаций, а также приведенные выше замечания.

В случае $\tilde{Q}(z) = Q(z), z \in X$, следуя определениям § 2, получаем так называемые слабый касательный [6,19, 22,23] $T_w(x_0 | G)$ и слабый внутренний $I_w(x_0 | G)$ конуса к множеству G в точке x_0, а также слабые соответственно верхнюю $D_w^{в}(\varphi, x_0)$ и нижнюю $D_w^{н}(\varphi, x_0)$ обобщенные производные [6] функции φ в точке x_0 по направлениям.

Если пространство X конечномерно, либо множество G и функция φ выпуклы, эти понятия совпадают с введенными в § 2. В общем же случае

$$T_w(x_0|G) \supset T(x_0|G) \supset I(x_0|G) \supset I_w(x_0|G),$$

$$D_w^{в}(\varphi, x_0)(z) \geq D^{в}(\varphi, x_0)(z) \geq D^{н}(\varphi, x_0)(z) \geq D_w^{н}(\varphi, x_0)(z), \; z \in X,$$

причем включения и неравенства могут быть строгими (см. [23]). Некоторые свойства слабых касательных конусов и слабых обобщенных производных по направлениям можно найти в [6].

Отметим, что так как пространство X, рассматриваемое

со слабой топологией, не является, вообще говоря, метризуемым, можно получить дальнейшее обобщение теоремы I, если при построении множеств $Q(z), z \in X$, ввести в рассмотрение обобщенные последовательности [3].

§ 4. Примеры аппроксимаций

Как отмечалось выше, делая различные предположения относительно множеств $\tilde{Q}(z), z \in X$, а также функций Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, и множества M, из теоремы I можно получить ряд следствий, отвечающих различным аппроксимациям множеств и функций, входящих в постановку задачи (А). Рассмотрим в данном параграфе некоторые примеры наиболее типичных аппроксимаций.

Пусть $\tilde{Q}(z)=Q(z), z \in X$, и пусть $\Phi_i, i=0,1,\dots,m$, - положительно однородные выпуклые функции, удовлетворяющие на X условиям (5) и непрерывные в точке 0. Предположим, кроме того, что для каждого $i \in J \cup \{0\}$ множество $B_i = \{z \in X : \Phi_i(z) < 0\}$ не пусто.

При сделанных предположениях, как нетрудно установить, имеют место равенства:

$$B_i^* = \{y^* \in X^* : y^* = \lambda x^*, \lambda \geq 0, x^* \in \partial \Phi_i(0)\}, i \in J \cup \{0\},$$

причем $0 \notin \partial \Phi_i(0), i \in J \cup \{0\}$. Положим $B_i = X$, $i \in \{1,2,\dots,m\} \setminus J$.

Если теперь предположить, что M - выпуклый конус, удовлетворяющий условию (4), и выполнено условие (β) теоремы I, то с учетом замечания 2 из § 3 приходим к следующему утверждению.

<u>Следствие I</u>. Пусть x_0 - решение задачи (А). Тогда най-

дутся такие не равные одновременно нулю точки $y_i^* \in B_i^*$, $i=0,1,\dots,m$, и $y^* \in M^*$, что

$$\sum_{i=0}^{m} y_i^* + y^* = 0. \qquad (I2)$$

Выпуклое множество B_i в силу предложения 6 есть конус вариаций, допустимых по i-му ограничению типа неравенства [4], $i=1,2,\dots,m$, а множество B_0 можно трактовать как конус запрещенных вариаций функции φ_0 в точке x_0. Поскольку множество M есть конус вариаций, допустимых по ограничениям типа равенства [4], выполнены все условия теоремы Дубовицкого-Милютина. Равенство (I2) представляет собой уравнение Эйлера [4] для рассматриваемой задачи.

Подобно [I3] теорема Дубовицкого-Милютина может быть выведена из теоремы I и в общем виде.

Если функция φ удовлетворяет в окрестности точки x_0 условию Липшица, то представление (3) для ее верхней полупроизводной по направлениям можно упростить:

$$D^{\beta}(\varphi, x_0)(z) = \limsup_{t \to +0} (\varphi(x_0 + tz) - \varphi(x_0))/t, \quad z \in X. \qquad (I3)$$

Рассмотрим следующую положительно однородную функцию:

$$\varphi^{\circ}(x_0; z) = \limsup_{x \to 0;\, t \to +0} (\varphi(x_0 + x + tz) - \varphi(x_0 + x))/t, \quad z \in X.$$

Очевидно, $\varphi^{\circ}(x_0; \cdot)$ есть непрерывная выпуклая функция, причем

$$\varphi^{\circ}(x_0; z) \geq D^{\beta}(\varphi, x_0)(z), \quad z \in X.$$

Как отмечалось выше, субдифференциал функции $\varphi^{\circ}(x_0; \cdot)$ в нуле можно принять в качестве обобщения субдифференциала функции φ в точке x_0. Он называется обобщенным градиентом [20,2I] функции φ в точке x_0; обозначим его

символом $\partial_c \varphi(x_0)$.

Если воспользоваться теперь теоремой I, то с учетом замечания 2 из § 3, приходим к следующему утверждению, которое представляет собой некоторое обобщение результата работы [2I] в случае отсутствия ограничений типа равенства.

<u>Следствие 2</u>. Пусть x_0 - решение задачи (A), и пусть функции φ_i, $i=0,1,\dots,m$, удовлетворяют в некоторой окрестности точки x_0 условию Липшица. Тогда, если выпуклое множество M удовлетворяет условиям: $M \subset T(x_0|G)$, $0 \in M$, то существуют такие $x_i^* \in X^*$, $i=0,1,\dots,m$, и такие не равные одновременно нулю неотрицательные числа λ_i, $i=0,1,\dots,m$, что

I) $x_i^* \in \partial_c \varphi_i(x_0)$, $i=0,1,\dots,m$,

2) $-\sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* \in M^*$,

3) $\lambda_i \varphi_i(x_0) = 0$, $i=1,2,\dots,m$

Если найдется такая точка $\bar{z} \in M$, что $\varphi_i^\circ(x_0;\bar{z}) < 0$, $i \in J$, то $\lambda_0 \neq 0$.

В качестве множества M в утверждении следствия 2 можно, в частности, взять касательный конус к множеству G в точке x_0 в смысле Кларка [20] (см. [3I]). Тогда M^* будет представлять собой нормальный конус к множеству G в точке x_0 в смысле Кларка [20,2I]. Отметим, что из следствия 2 следуют результаты работ [2,30]. Из теоремы I можно вывести обобщение следствия 2 на случай нелипшицевых функций (см. [3I]).

Наряду с функцией $\varphi^\circ(x_0;\cdot)$ иногда рассматривают и другие аппроксимации функции φ вблизи точки x_0. То-

ворят, что функция h касается функции φ в точке x_0 сверху [26], если $h(x_0)=\varphi(x_0)$ и для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что

$$\varphi(x)\le h(x)+\varepsilon\|x-x_0\|,$$

как только $\|x-x_0\|\le\delta$.

<u>Следствие 3</u>. Пусть x_0 – решение задачи (А), и пусть для каждого $i=0,1,\dots,m$ непрерывная выпуклая функция h_i касается функции φ_i в точке x_0. Тогда, если выпуклое множество M удовлетворяет условиям: $M\subset T(x_0|G)$, $0\in M$, то существуют такие не равные одновременно нулю неотрицательные числа λ_i, $i=0,1,\dots,m$, что

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(h_i(x_0+z)-h_i(x_0))\ge 0,\quad z\in M,$$

$$\lambda_i\varphi_i(x_0)=0,\ i=1,2,\dots,m.$$

Более того, существуют такие $x_i^*\in X^*$, $i=0,1,\dots,m$, что

$$\langle x_i^*,z\rangle=h_i(x_0+z)-h_i(x_0),\ i=0,1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\langle x_i^*,z\rangle\ge 0,\quad z\in M.$$

Если найдется такая точка $\bar z\in M$, что $h_i(\bar z)<0$, $i=1,2,\dots,m$, то $\lambda_0\ne 0$.

Действительно, по определению имеем

$$D^b(\varphi_i,x_0)(z)\le D^b(h_i,x_0)(z),\quad z\in X,\ i=0,1,\dots,m.$$

Поскольку непрерывная выпуклая функция является липшицевой [24] и дифференцируема по всем направлениям [5], в силу (13) получаем, что

$$D^b(h_i, x_0)(z) = h_i'(x_0; z), \ z \in X, \ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Так как, очевидно,

$$h_i'(x_0; z) \le h_i(x_0 + z) - h_i(x_0), \ z \in X, \ i = 0, 1, \ldots, m,$$

первая часть утверждения следствия 3 вытекает из теоремы I. Вторая часть следует из замечания 2 § 3.

Утверждение следствия 3 совпадает с доказанным в [26] правилом множителей (в случае отсутствия ограничений типа равенства). Из него легко выводятся результаты, приведенные в [13,24]

Теперь рассмотрим набор множеств $\tilde{Q}(z)$, $z \in X$, специального вида. Для каждого $z \in X$ положим

$$\tilde{Q}(z) = \left\{ \{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in Q(z) : x_k = t_k z, \ \alpha_k = t_k^{-1}, k = 1, 2, \ldots, \ t_k \to +0 \right\}.$$

Тогда

$$\tilde{T}(x_0 | G) = \left\{ z \in X : \exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty}, x_0 + t_k z \in G, k = 1, 2, \ldots, t_k \to +0 \right\} —$$

радиальный касательный конус к множеству G в точке x_0,

$$\tilde{D}^b(\varphi, x_0)(z) = \limsup_{t \to +0} (\varphi(x_0 + t z) - \varphi(x_0))/t \ —$$

верхняя радиальная полупроизводная [34] функции φ в точке x_0 по направлению z.

Теорема I в применении к введенным выше аппроксимациям дает непосредственное обобщение основного результата работы [16]. Если функции φ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, и множество G выпуклы, то при этом сразу получается теорема Куна-Таккера выпуклого программирования.

Можно использовать аппроксимации и несколько более обще-

го вида, если для $z \neq 0$ положить

$$\tilde{Q}(z)=\left\{\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in Q(z): x_k=\xi_z(t_k), \alpha_k=t_k^{-1}, k=1,2,\dots, t_k \to +0\right\},$$

где ξ_z – некоторая функция из R в X такая, что

$$\lim_{t \to +0} \xi_z(t)/t = z.$$

Введенные выше радиальные аппроксимации получаются отсюда при $\xi_z(t)=tz$.

Из теоремы I легко выводится также следующий результат, который представляет собой так называемый "абстрактный принцип максимума" [29,33] в применении к рассматриваемой задаче (в приведенной формулировке правильнее было бы говорить о принципе минимума).

<u>Следствие 4</u>. Пусть x_0 – решение задачи (A), и пусть выпуклое множество $M \subset X$ и выпуклые функции Φ_i, $i=0,1,\dots,m$, на X, удовлетворяют следующим условиям: для любого $z \in M$ существует такая последовательность $\{\alpha_k, x_k\}_{k=1}^{\infty} \in Q(z)$, что $x_k + x_0 \in G$, $k=1,2,\dots$, и

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k(\varphi_i(x_0+x_k)-\varphi_i(x_0)) \leq \Phi_i(z), \ i=0,1,\dots,m.$$

Тогда существуют такие не равные одновременно нулю неотрицательные числа λ_i, $i=0,1,\dots,m$, что выполнены условия (6),(7).

Если найдется такая точка $\bar{z} \in M$, что $\Phi_i(\bar{z}) < 0$, $i \in J$, то $\lambda_0 \neq 0$.

Для доказательства этого утверждения достаточно для каждого $z \in M$ определить $\tilde{Q}(z)$ как одноэлементное множество, включив в него последовательность, о которой идет речь в формулировке следствия 4, и воспользоваться теоремой I.

По приведенной схеме можно построить и другие аппроксимации множеств и функций, а также получить ряд других необходимых условий экстремума в задачах невыпуклого недифференцируемого программирования.

ЛИТЕРАТУРА

I. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., "Наука", 1977.

2. Гупал А.М., Голодников А.Н. О свойствах класса почти-дифференцируемых функций. В сб. "Теория оптимальных решений". Киев, 1976, 21-28.

3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., "ИЛ", 1962.

4. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. "Журн. вычисл. матем. и матем.физ.",1965, т.5, № 3, 395-453.

5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М., "Наука", 1974.

6. Кругер А.Я. Субдифференциалы невыпуклых функций и обобщенные производные по направлениям. Деп. в ВИНИТИ № 2661-77, 39 с.

7. Кругер А.Я. Обобщенные производные по направлениям и необходимые условия экстремума в невыпуклых задачах математического программирования. В сб. "IУ Всес. конф. по проблемам теоретич. кибернетики. Тезисы докладов". Новосибирск, 1977, 60-62.

8. Кругер А.Я., Мордухович Б.Ш. Минимизация негладких функционалов в задачах оптимального управления. "Изв. АН СССР. Техническая кибернетика", 1978, № I.

9. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., "Мир", 1975.

10. Мордухович Б.Ш. Принцип максимума в задаче оптимально-

го быстродействия с негладкими ограничениями. "Прикл. матем. и механика", 1976, т.40, вып.6, 1014-1023.

11. Мордухович Б.Ш., Кругер А.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче терминального управления с нефункциональными ограничениями. "Докл. АН БССР", 1976, т.20, № 12, 1064--1067.

12. Нойштадт Л. Абстрактная вариационная теория с приложениями к широкому классу задач оптимизации. "Кибернетика", 1967, № 1, 77-91.

13. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М., "Наука", 1969.

14. Пшеничный Б.Н. О необходимых условиях экстремума для негладких функций. "Кибернетика", 1977, № 6, 92-96.

15. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., "Мир", 1973.

16. Lazaraa M.S., Goode J.J. Extension of optimality conditions via supporting functions. "Math. Programming", vol.5, No.3, 267-285.

17. Lazaraa M.S., Goode J.J., Nashed M.Z. On the cones of tangents with applications to mathematical programming. "J. Optimiz. Theory Appl.", 1974, vol.13, No.4, 389-426.

18. Lazaraa M.S., Shetty C.M. Foundations of Optimization. "Springer-Verlag", 1976.

19. Lazaraa M.S., Shetty C.M., Goode J.J., Nashed M.Z. Nonlinear programming without differentiability in Banach spaces: necessary and sufficient constraint qualification. "Applicable Analysis", 1976, vol.5, No.3, 165-173.

20. Clarke F.H. Generalized gradients and applications. "Trans. Amer. Math. Soc.", 1975, vol.205, 247-262.

21. Clarke F.H. A new approach to Lagrange multipliers. "Math. Oper. Res.", 1976, vol.1, No.2, 165-174.

22. Gould F.J., Tolle J.W. Geometry of optimality conditions and constraint qualifications. "Math. Programming", 1972, vol.2, 1-18.

23. Gould F.J., Tolle J.W. Optimality conditions and constraint qualifications in Banach space. "J. Optimiz. Theory Appl.", 1975, vol.15, No.6, 667-684.

24. Halkin H. Nonlinear nonconvex programming in an infinite dimensional space.- in "Mathematical Theory of Control" (A.V. Balakrishnan and L.W. Neustadt, eds.). N.Y., "Academic Press", 1967, 10-25.

25. Halkin H. A satisfactory treatment of equality and operator constraints in the Dubovitskii-Milyutin optimization formalism. "J. Optimiz. Theory Appl.", 1970, vol.6, No.2, 138-149.

26. Halkin H. Necessary conditions in mathematical programming and optimal control theory. "Lect. Notes Econ. Math. Syst.", 1974, vol.105, 113-165.

27. Halkin H. Interior mapping theorem with set-valued derivatives. "J. Anal. Math.", 1976, vol.30, 200-207.

28. Halkin H. Mathematical programming without differentiability.- in "Calculus of Variations and Control Theory" (D.L. Russel, ed.). N.Y. "Academic Press", 1976.

29. Halkin H., Neustadt L.W. General necessary conditions for optimization problems. "Proc. Nat. Acad. Sci. USA", 1966, vol.56, No.4, 1066-1071.

30. Hiriart-Urruty J.-B. Conditions nécessaires d'opti-

malité en programmation non differentiable. "C.R.Acad. Sci.", 1976, t.283, N11, A843-A845.

31. Hiriart-Urruty J.-B. Sur les cônes tangents et leurs applications en programmation non différentiable. "C. R. Acad. Sci.", 1977, t.284, N 1, A1381-A1384.

32. Neustadt L.W. An abstract variational theory with application to a broad class of optimization problems. I: General theory. - "SIAM J. Control", 1966, vol.4, No.3, 505-527.

33. Neustadt L.W. A general theory of extremals. "J. Computer and System Sci.", 1969, vol.3, No.1, 57-92.

34. Penot J.-P. Sous-différentiels de fonctions numériques non convexes. "C.R. Acad. Sci.", 1974, t.278, N24, A1553-A1555.

35. Rockafellar R.T. Conjugate Duality and Optimization. Philadelphia, SIAM, 1974.

36. Varaiya P. Nonlinear programming in Banach space. "SIAM J. Appl. Math.", 1967, vol.15, No.2, 284-293.

37. Warga J. Derivate containers, inverse functions and controllability.- in "Calculus of Variations and Control Theory" (D.L.Russell, ed.). N.Y., "Academic Press", 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
§ I. Постановка задачи 3
§ 2. Основной результат 4
§ 3. Некоторые замечания I0
§ 4. Примеры аппроксимаций I4
ЛИТЕРАТУРА 2I