Доклады Национальной академии наук Беларуси

2000 март—апрель Том 44 № 2

УДК 517.9 + 519.8

А. Я. КРУГЕР

СТРОГИЕ (ε, δ)-ПОЛУДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Данная работа представляет собой развитие результатов [1, 2], основанное на применении *гладкого варационного принципа Борвейна—Прейса* [3] и *метода сепарабельной редукции Фабиана* [4].

1. Пусть Ω — множество в банаховом пространстве X, φ — функция из Ω в R, $x \in \Omega$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta > 0$. Множества

$$\partial_\varepsilon^- \varphi(x) = \left\{ x^* \in X^* : \liminf_{\substack{u \to x \\ u \in \Omega}} \frac{\varphi(u) - \varphi(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \geq -\varepsilon \right\},$$

$$\partial_{\varepsilon,\delta}^- \varphi(x) = \bigcup [\partial_\varepsilon^- (\mathrm{cl}^\downarrow \varphi)(u) : u \in \mathrm{cl}\Omega \cap B_\delta(x), |\mathrm{cl}^\downarrow \varphi(u) - \varphi(x)| \leq \delta]$$

называются соответственно *нижним ε-полудифференциалом* и *строгим нижним* (ε, δ)-*полудифференциалом* функции φ в точке x. Здесь символ $\mathrm{cl}^\downarrow \varphi$ обозначает полунепрерывную снизу оболочку функции φ.

Строгий верхний (ε, δ)-*полудифференциал* можно определить равенством $\hat{\partial}_{\varepsilon,\delta}^+ \varphi(x) = -\hat{\partial}_{\varepsilon,\delta}^- (-\varphi)(x)$. Множество $\hat{\partial}_{\varepsilon,\delta}^\circ \varphi(x) = \hat{\partial}_{\varepsilon,\delta}^- \varphi(x) \cup \hat{\partial}_{\varepsilon,\delta}^+ \varphi(x)$ называется *строгим* (ε, δ)-*дифференциалом* функции φ в точке x.

Приведенные определения строгих (ε, δ)-полудифференциалов являются некоторыми модификациями введенных в [5] определений строгих ε-полудифференциалов. В случае $\varepsilon = 0$ будем называть их *строгими δ-полудифференциалами* и опускать индекс ε в соответствующих обозначениях. Строгие δ-полудифференциалы использовались в [6].

Все введенные выше множества представляют собой некоторые аналоги строгой производной. С использованием строгих (ε, δ)-полудифференциалов можно определить предельные конструкции — *обобщенные дифференциалы* [7] и *аппроксимативные субдифференциалы* [8], которые на протяжении ряда лет успешно применяются в негладком анализе и оптимизации.

Введенным понятиям отвечают соответствующие геометрические объекты: *множество ε-нормалей*

$$N_\varepsilon(x|\Omega) = \left\{ x^* \in X^* : \limsup_{\substack{u \to x \\ u \in \Omega}} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \leq \varepsilon \right\}$$

и *строгое множество* (ε, δ)-*нормалей*.

$$\hat{N}_{\varepsilon,\delta}(x|\Omega) = \bigcup [N_\varepsilon(u|\mathrm{cl}\Omega) : u \in \mathrm{cl}\Omega \cap B_\delta(x)],$$

а также (в случае $\varepsilon = 0$) *нормальный конус* $N(x|\Omega)$ и *строгий δ-нормальный конус* $\hat{N}_\delta(x|\Omega)$ к множеству Ω в точке x.

Для многозначного отображения $F : \Omega \to 2^Y$ можно определить *строгое* (ε, δ)-*сопряженное* и *строгое* δ-*сопряженное* многозначные отображения [6] к отображению F в точке (x, y). Они определяются равенствами

$$\hat{\partial}_{\varepsilon,\delta} F(x, y; y^*) = \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in \hat{N}_{\varepsilon,\delta}(x, y | G(F))\},$$

$$\hat{\partial}_{\delta} F(x, y; y^*) = \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in \hat{N}_{\delta}(x, y | G(F))\}.$$

2. Пусть Ω_1, Ω_2 — замкнутые множества в банаховом пространстве X. Следуя [1], введем константу

$$\theta(\Omega_1, \Omega_2) = \sup \{r \geq 0 : B_r \subset \Omega_1 - \Omega_2\}, \tag{1}$$

характеризующую меру их «перекрытия». Разность множеств в (1) понимается в алгебраическом смысле: $\Omega_1 - \Omega_2 = \{\omega_1 - \omega_2 : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. В случае $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ будем считать, что $\theta(\Omega_1, \Omega_2) = -\infty$.

В [9] введено определение экстремальной системы множеств. Оно может быть сформулировано следующим образом.

Определение 1. *Система множеств Ω_1, Ω_2 называется экстремальной, если $\theta(\Omega_1, \Omega_2) = 0$. Любая точка $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ называется экстремальной точкой системы множеств Ω_1, Ω_2.*

Понятие экстремальной системы характеризует взаимное расположение множеств в пространстве. Если X является пространством Асплунда, можно сформулировать двойственный критерий экстремальности (см. [2, 7, 9—11]).

Определение 2. *Будем говорить, что в точке $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ выполняется обобщенное уравнение Эйлера, если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существуют такие элементы $x_1^* \in \hat{N}_\delta(x | \Omega_1)$, $x_2^* \in \hat{N}_\delta(x | \Omega_2)$, что $\|x_1^* + x_2^*\|_* < \varepsilon$ и $\|x_1^*\|_* + \|x_2^*\|_* = 1$.*

Теорема 1. *Пусть X — пространство Асплунда и x — экстремальная точка системы множеств Ω_1, Ω_2. Тогда в точке x выполняется обобщенное уравнение Эйлера.*

Теорему 1 можно рассматривать как некоторое обобщение классической теоремы отделимости выпуклых множеств. Обобщенное уравнение Эйлера характеризует экстремальные свойства систем множеств. Оно использовалось в [9, 11—13] в качестве основного инструмента при выводе формул исчисления и необходимых условий экстремума.

Отметим, что в отличие от [2] в формулировке теоремы 1 вместо строгих множеств (ε, δ)-нормалей участвуют строгие δ-нормальные конусы и теорема сформулирована не для гладкого, а для произвольного асплундова пространства. Это стало возможным благодаря, во-первых, замене в доказательстве варационного принципа Экланда [13] гладким *варационным принципом Борвейна—Прейса* [3] *и, во-вторых, применению метода сепарабельной редукции Фабиана* [4].

3. Воспользовавшись (1), введем локальную константу

$$\hat{\theta}_x(\Omega_1, \Omega_2) = \liminf_{\substack{\omega_1 \in \Omega_1,\, \omega_2 \in \Omega_2 \\ \omega_1 \to x,\, \omega_2 \to x, \\ \rho \to +0}} \frac{\theta([\Omega_1 - \omega_1] \cap B_\rho, [\Omega_2 - \omega_2] \cap B_\rho)}{\rho}. \tag{2}$$

Определение 3. *Система множеств Ω_1, Ω_2 называется экстремальной в окрестности точки $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, если $\hat{\theta}_x(\Omega_1, \Omega_2) = 0$.*

Если система множеств Ω_1, Ω_2 является экстремальной в смысле определения 1, то она, очевидно, является экстремальной в окрестности любой своей экстремальной точки x.

Константа (2) может быть представлена в виде

$$\hat{\theta}_x(\Omega_1, \Omega_2) = \liminf_{\substack{\omega_1 \in \Omega_1,\, \omega_2 \in \Omega_2 \\ \omega_1 \to x,\, \omega_2 \to x,}} \theta_0(\Omega_1 - \omega_1, \Omega_2 - \omega_2),$$

где

$$\theta_x(\Omega_1, \Omega_2) = \liminf_{\rho \to +0} \frac{\theta(\Omega_1 \cap B_\rho(x), \Omega_2 \cap B_\rho(x))}{\rho}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть X — пространство Асплунда. Система множеств Ω_1, Ω_2 является экстремальной в окрестности точки x тогда и только тогда, когда в точке x выполняется обобщенное уравнение Эйлера.*

Сформулированная теорема может служить инструментом получения необходимых и достаточных условий «почти оптимальности» в различных экстремальных задачах.

Определение экстремальной системы можно распространить на случай n множеств.

О п р е д е л е н и е 4. *Система множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется экстремальной в окрестности точки x, если система множеств $\tilde{\Omega}_1 = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ и $\tilde{\Omega}_2 = \{(\omega, \omega, \ldots, \omega) \in X^n\}$ является экстремальной в окрестности точки $(x, x, \ldots, x) \in X^n$.*

Следующая теорема дает двойственный критерий экстремальности.

Т е о р е м а 3. *Пусть X — пространство Асплунда. Система множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, является экстремальной в окрестности точки x тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существуют такие элементы $x_i^* \in \hat{N}_\delta(x|\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что*

$$\|x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*\|_* < \varepsilon, \ \|x_1^*\|_* + \|x_2^*\|_* + \ldots + \|x_n^*\|_* = 1.$$

4. При доказательстве двойственных критериев экстремальности центральную роль играет *теорема о накрывании* [1, 15], представляющая собой некоторое обобщение классической теоремы об открытом отображении на случай многозначного отображения.

Рассмотрим полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : \Omega \to 2^Y$ (его график $G(F)$ замкнут в $X \times Y$). Введем обозначения

$$\theta_F(u, v, \rho) = \sup\{r \geq 0 : B_r(v) \subset F(\Omega \cap B_\rho(u))\}, \tag{3}$$

$$\hat{\theta}_F(x, y) = \liminf_{\substack{u \in \Omega,\ v \in F(u) \\ u \to x,\ v \to y, \\ \rho \to +0}} \frac{\theta_F(u, v, \rho)}{\rho}. \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 5. *Многозначное отображение F накрывает в окрестности $(x, y) \in G(F)$, если $\hat{\theta}_F(x, y) > 0$.*

Для характеристики свойства накрывания используется константа

$$b_F(x, y) = \sup_{\delta > 0} \inf\left\{\|x^*\|_* : x^* \in \hat{\partial}_\delta F(x, y; y^*),\ \|y^*\|_* = 1\right\}. \tag{5}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть Y — пространство Асплунда. Отображение F накрывает в окрестности точки $(x, y) \in G(F)$ тогда и только тогда, когда $b_F(x, y) > 0$.*

В случае обычного (однозначного) непрерывного отображения $f : \Omega \to Y$ в определении свойства накрывания вместо (3), (4) используются константы

$$\theta_f(u, \rho) = \sup\{r \geq 0 : \mathrm{B}_r(f(u)) \subset f(\Omega \cap \mathrm{B}_\rho(u))\},$$

$$\hat{\theta}_f(x) = \liminf_{\substack{u \in \Omega,\ u \to x, \\ \rho \to +0}} \frac{\theta_f(u, \rho)}{\rho},$$

а в формулировке критерия накрывания вместо (5) следует использовать константу $b_f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\left\{\|x^*\|_* : x^* \in \hat{\partial}_\delta^- < y^*, f > (x),\ \|y^*\|_* = 1\right\}$, где $< y^*, f > (u) =< y^*, f(u) >$, $u \in \Omega$.

Т е о р е м а 5. *Пусть Y — пространство Асплунда. Отображение f накрывает в окрестности точки $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $b_f(x) > 0$.*

5. Пусть Ω и M — замкнутые множества в банаховых пространствах X и Y соответственно, f — функция из Ω в Y. Будем считать ее M-полунепрерывной. Последнее означает, что многозначное отображение $F : \Omega \to 2^Y$, заданное формулой

$$F(u) = f(u) - M,\ u \in \Omega, \tag{6}$$

полунепрерывно сверху. Обозначим

$$\hat{\theta}_x(f, \Omega, M) = \liminf_{\substack{u\in\Omega,\ v\in M\\ u\to x,\ v-f(u)\to 0\\ \rho\to+0}} \frac{\theta(f(\Omega\cap B_\rho(u)) - f(u),\ M - v)}{\rho}.$$

Определение 6. *Точка x называется (f, Ω, M)-экстремальной, если $x \in \Omega$, $f(x) \in M$ и $\hat{\theta}_x(f, \Omega, M) = 0$.*

Приведенное определение является некоторой модификацией соответствующих определений из [12, 15].

Теорема 6. *Пусть Y — пространство Асплунда. Точка x является (f, Ω, M)-экстремальной тогда и только тогда, когда $x \in \Omega$, $f(x) \in M$ и для любого $\delta > 0$ существует элемент $y^* \in Y^*$ такой, что $\|y^*\|_* = 1$ и*

$$0 \in \hat{\partial}_\delta F(x, 0; y^*), \tag{7}$$

где отображение F задано формулой (6).

Сформулированная теорема дает общие условия экстремальности. Элемент y^* можно рассматривать как аналог вектора множителей Лагранжа в классической задаче нелинейного программирования. Условие (7) влечет условие $y^* \in \hat{N}_\delta(f(x)|M)$, которое обобщает ограничения на знак множителей и условия дополняющей нежесткости.

При дополнительном предположении липшицевости из теоремы 6 вытекает следующий результат.

Теорема 7. *Пусть Y — пространство Асплунда, функция $f: \Omega \to Y$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x. Точка x является (f, Ω, M)-экстремальной тогда и только тогда, когда $x \in \Omega$, $f(x) \in M$ и для любого $\delta > 0$ существует элемент $y^* \in Y^*$ такой, что $\|y^*\|_* = 1$,*

$$0 \in \hat{\partial}_\delta^- < y^*, f > (x) \tag{8}$$

и выполняется условие (7).

Условие (8) обобщает традиционное правило множителей Лагранжа.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф97-196) и INTAS (грант INTAS 97-1050).

Summary

New definitions of extremality for sets and functions are offered. Necessary and sufficient extremality conditions are stated in Asplund spaces in terms of strict δ-semidifferentials and strict δ-normals.

Литература

1. Кругер А. Я. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 3. С. 21—26.
2. Кругер А. Я. // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42, № 1. С. 24—28.
3. Borwein J. M., Preiss D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. Vol. 303. P. 517—527.
4. Fabian M. // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 34. P. 568—576.
5. Кругер А. Я. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 4. С. 34—39.
6. Kruger A. Ya. // Dynamical Systems: Stabnility, Control, Optimization / Abstracts. Minsk, 1998. Vol. 2. P. 165—168.
7. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М., 1988.
8. Ioffe A. D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 281, N 1. P. 389—416.
9. Кругер А. Я., Мордухович Б. Ш. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 8. С. 684—687.
10. Ioffe A. D. // J. London Math. Soc. 1990. Vol. 41. P. 175—192.
11. Mordukhovich B. S., Shao Y. // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348. P. 1235—1280.
12. Кругер А. Я. // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 78—90.
13. Mordukhovich B. S. // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 183, N 1. P. 250—288.
14. Ekeland I. // J. Math. Anal. Appl. 1974. Vol. 47, N 2. P. 324—353.
15. Kruger A. Ya. // Optimization. 1988. Vol. 19, N 6. P. 763—780.

Международный институт трудовых и социальных отношений (г. Минск)

Поступило 05.05.1999