Доклады Национальной академии наук Беларуси

1998 январь — февраль Том 42 № 1

УДК 517.9+519.8

А. Я. КРУГЕР

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ СИСТЕМ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

1. Пусть X — банахово пространство, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ $(n \ge 2)$ — непустые замкнутые множества в X. В [1, 2] введено следующее определение (приведенная формулировка следует [3]).

Система множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется *экстремальной*, если $\cap_{i=1}^n \Omega_i \ne \varnothing$ и существуют такие последовательности $\left\{a_k^i\right\} \subset X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сходящиеся к нулю, что $\cap_{i=1}^n \Omega_{ik} = \varnothing$, где $\Omega_{ik} = \Omega_i - a_k^i = \left\{x - a_k^i : x \in \Omega_i\right\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$ При этом любая точка $x \in \cap_{i=1}^n \Omega_i$ называется *экстремальной точкой* системы множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Понятие экстремальной системы характеризует взаимное расположение множеств в пространстве. В случае гладкого пространства X (пространство называется гладким, если в нем существует эквивалентная норма, дифференцируемая по Фреше во всех ненулевых точках) можно сформулировать двойственный критерий экстремальности (см. [1—3]).

Т е о р е м а 1. *Пусть X — гладкое пространство и x — экстремальная точка системы множеств Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_i^* \in \hat{N}_\varepsilon(x|\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что*

$$x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^* = 0, \tag{1}$$

$$\|x_1^*\|_* + \|x_2^*\|_* + \ldots + \|x_n^*\|_* = 1. \tag{2}$$

В формулировке теоремы 1 используется понятие *строгого множества ε-нормалей* [4], которое определяется следующим образом:

$$N_\varepsilon(x|\Omega) = \left\{x^* \in X^* : \limsup_{\substack{u \to x \\ u \in \Omega}} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \le \varepsilon\right\},$$

$$\hat{N}_\varepsilon(x|\Omega) = \bigcup [N_\varepsilon(u|\operatorname{cl}\Omega) : u \in \operatorname{cl}\Omega \cap B_\varepsilon(x)].$$

При $n = 2$ теорему 1 можно рассматривать как обобщение классической теоремы отделимости выпуклых множеств. В общем случае она обобщает теорему А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина [5] и соответствующий результат В. Г. Болтянского [6]. По аналогии с [5] соотношение (1) называется *обобщенным уравнением Эйлера.*

Обобщенное уравнение Эйлера характеризует экстремальные свойства систем множеств. Оно использовалось в [3], [7—10] в качестве основного инструмента при выводе формул исчисления и необходимых условий экстремума, заменяя тем самым традиционную теорему отделимости. В [11, 12] показано, что обобщенное уравнение Эйлера является следствием так называемой *теоремы о накрывании.* Можно показать, что в действительности оба результата являются в определенном смысле эквивалентными и основываются *на вариационном принципе И. Экланда.*

Из теоремы 1 вытекает следующий результат, представляющий собой обобщение теоремы о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству.

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть X — гладкое пространство, Ω — замкнутое множество в X, x — граничная точка множества Ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x_i^* \in \hat{N}_\varepsilon(x|\Omega)$, что* $\|x^*\|_* = 1.$

2. Обобщенное уравнение Эйлера дает необходимые условия экстремальности систем множеств. Ему удовлетворяют также и некоторые системы, не являющиеся экстремальными в смысле приведенного выше определения. Представляет интерес выяснить, для какого возможно более широкого класса множеств справедливо обобщенное уравнение Эйлера.

Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Следуя [13], введем для множеств Ω_1 и Ω_2 константу

$$\theta(\Omega_1, \Omega_2) = \sup\{r > 0: B_r \subset \Omega_1 - \Omega_2\}, \tag{3}$$

характеризующую меру их «перекрытия». Разность множеств в (3) понимается в алгебраическом смысле: $\Omega_1 - \Omega_2 = \{\omega_1 - \omega_2 : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. В случае $\{r > 0 : B_r \subset \Omega_1 - \Omega_2\} = \emptyset$ будем считать, что $\theta(\Omega_1, \Omega_2) = 0$.

Будем говорить, что множества Ω_1, Ω_2 образуют *экстремальную систему в окрестности* точки $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, если

$$\liminf_{\substack{\omega_1 \in \Omega_1,\, \omega_2 \in \Omega_2 \\ \omega_1 \to x,\ \omega_2 \to x, \\ \rho \to +0}} \frac{\theta([\Omega_1 - \omega_1] \cap B_\rho, [\Omega_2 - \omega_2] \cap B_\rho)}{\rho} = 0. \tag{4}$$

Воспользовавшись (3), введем две локальные константы

$$\theta_x(\Omega_1, \Omega_2) = \liminf_{\rho \to +0} \frac{\theta(\Omega_1 \cap B_\rho(x), \Omega_2 \cap B_\rho(x))}{\rho}, \tag{5}$$

$$\hat{\theta}_x(\Omega_1, \Omega_2) = \liminf_{\substack{\omega_1 \in \Omega_1,\, \omega_2 \in \Omega_2 \\ \omega_1 \to x,\, \omega_2 \to x}} \theta_0(\Omega_1 - \omega_1, \Omega_2 - \omega_2). \tag{6}$$

Условие (4) эквивалентно равенству $\hat{\theta}_x(\Omega_1, \Omega_2) = 0$.

Если система множеств Ω_1, Ω_2 является экстремальной в смысле определения пункта 1 (которое, очевидно, эквивалентно условию $\theta(\Omega_1, \Omega_2) = 0$), то множества Ω_1, Ω_2 образуют экстремальную систему в окрестности точки x.

Вообще, определение (4) отличается от предыдущего двумя характерными моментами. Во-первых, требуется не строгое «неперекрытие» множеств, а лишь с точностью до бесконечно малой деформации (см. (5)).

Во-вторых, множества могут «не перекрываться» не в самой точке x: достаточно, чтобы в любой ее окрестности нашлись такие точки $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$, что множества $\Omega_1 - \omega_1$, $\Omega_2 - \omega_2$ «почти не перекрываются» (см. (6)).

В выпуклом случае определение экстремальности множеств принимает привычный вид.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть Ω_1, Ω_2 — выпуклые множества,* $\operatorname{int} \Omega_2 \neq \emptyset$. *Множества Ω_1, Ω_2 образуют экстремальную систему в окрестности точки x тогда и только тогда, когда* $\Omega_1 \cap \operatorname{int} \Omega_2 = \emptyset$.

Определение (4) является переформулировкой требования, чтобы функция $(\omega_1, \omega_2) \to \omega_2 - \omega_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to X$ не накрывала (см. п. 4) в окрестности точки x. Применение теоремы о накрывании (теорема 5) приводит к следующему результату, представляющему собой некоторое обобщение теоремы отделимости.

Т е о р е м а 2. *Пусть X — гладкое пространство. Множества Ω_1, Ω_2 образуют экстремальную систему в окрестности точки x тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x^* \in X^*$, $\|x^*\|_* = 1$, что $x^* \in \hat{N}_\varepsilon(x|\Omega_1)$, $-x^* \in \hat{N}_\varepsilon(x|\Omega_2)$.*

Сформулированная теорема может служить инструментом получения необходимых и достаточных условий «почти оптимальности» в различных экстремальных задачах.

3. В случае $n \geq 2$ определение экстремальной системы можно сформулировать следующим образом.

Будем говорить, что множества Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют *экстремальную систему в окрестности* точки x, если множества $\widetilde{\Omega}_1 = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ и $\widetilde{\Omega}_2 = \{(\omega, \omega, \ldots, \omega) \in X^n : \omega \in \Omega_n\}$ образуют экстремальную систему в окрестности точки $(x, x, \ldots, x) \in X^n$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если множества Ω_i, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, образуют экстремальную систему в окрестности точки x, то для любого $j \in I$ множества $\widetilde{\Omega}_1 = \prod_{i \in I \setminus j} \Omega_i$ и $\widetilde{\Omega}_2 = \{(\omega, \omega, \ldots, \omega) \in X^{n-1} : \omega \in \Omega_j\}$ образуют экстремальную систему в окрестности точки* $(x, x, \ldots, x) \in X^{n-1}$.

Следующая теорема дает двойственный критерий экстремальности (обобщенное уравнение Эйлера).

Т е о р е м а 3. *Пусть X — гладкое пространство. Множества Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют экстремальную систему в окрестности точки x тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_i^* \in \hat{N}_\varepsilon(x|\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что выполняются условия* (1), (2).

4. При доказательстве двойственных критериев экстремальности центральную роль играет теорема о накрывании [11—14], представляющая собой некоторое обобщение классической теоремы об открытом отображении на случай многозначного отображения. Она также обобщает и усиливает соответствующий результат работы [15]. Для исследования вопросов экстремальности удобна приводимая ниже эквивалентная формулировка свойства накрывания.

Рассмотрим полунепрерывное сверху многозначное отображение $F : \Omega \to 2^Y$ (его график $G(F)$ замкнут в $X \times Y$). Введем обозначение

$$\delta_F(u, v, \rho) = \sup\{r > 0 : B_r(v) \subset F(\Omega \cap B_\rho(u))\}. \tag{7}$$

В случае $\{r > 0 : B_r(v) \subset F(\Omega \cap B_\rho(u))\} = \emptyset$ будем считать, что $\delta_F(u, v, \rho) = 0$.

Будем говорить, что многозначное отображение F накрывает в окрестности $(x, y) \in G(F)$, если

$$\liminf_{\substack{u\in\Omega,\ v\in F(u)\\ u\to x,\ v\to y,\\ \rho\to+0}} \frac{\delta_F(u, v, \rho)}{\rho} = 0. \tag{8}$$

Для характеристики свойства накрывания используется константа

$$b_F(x, y) = \sup_{\varepsilon>0} \inf\{\|x^*\|_* : x^* \in \hat{\partial}_\varepsilon F(x, y; y^*), \|y^*\|_* = 1\}, \tag{9}$$

где $\hat{\partial}_\varepsilon F(x, y; \cdot) : Y^* \to X^*$ — *строгое* ε*-сопряженное* многозначное отображение [14] к отображению F в точке (x, y). Оно определяется равенством

$$\hat{\partial}_\varepsilon F(x, y; y^*) = \{x^* \in X^* : (x^*, -y^*) \in \hat{N}_\varepsilon(x, y|G(F))\}.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть Y — гладкое пространство. Отображение F накрывает в окрестности точки $(x, y) \in G(F)$ тогда и только тогда, когда* $b_F(x, y) > 0$.

В случае обычного (однозначного) непрерывного отображения $f : \Omega \to Y$ в определении свойства накрывания (8) вместо (7) используется константа

$$\delta_f(u, \rho) = \sup\{r > 0 : B_r(f(u)) \subset f(\Omega \cap B_\rho(u))\},$$

а в формулировке критерия накрывания вместо (9) следует использовать константу

$$b_f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf\{\|x^*\|_* : x^* \in \hat{\partial}_\varepsilon^- < y^*, f > (x), \|y^*\|_* = 1\}. \tag{10}$$

В (10) использованы следующие обозначения:

$$<y^*, f> (u) = <y^*, f(u)>, \ u \in \Omega,$$

$$\hat{\partial}_\varepsilon^- \varphi(x) = \bigcup [\partial_\varepsilon^- (\mathrm{cl}^{\downarrow}\varphi)(u) : u \in \mathrm{cl}\,\Omega \cap B_\varepsilon(x), |\mathrm{cl}^{\downarrow}\varphi(u) - \varphi(x)| \le \varepsilon], \tag{11}$$

$$\partial_\varepsilon^- \varphi(x) = \left\{x^* \in X^* : \liminf_{\substack{u\to x\\ u\in\Omega}} \frac{\varphi(u) - \varphi(x) - < x^*, u - x >}{\|u - x\|} \ge -\varepsilon\right\}. \tag{12}$$

Множества (11), (12) называются соответственно *строгим нижним* ε*-полудифференциалом* и *нижним* ε*-полудифференциалом* [4] функции $\varphi : \Omega \to R$ в точке x.

Т е о р е м а 5. *Пусть Y — гладкое пространство. Отображение f накрывает в окрестности точки $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда* $b_f(x) > 0$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Summary

New extremality notion is introduced for sets systems. It defines sets joint disposition in space. Extremal systems arise when investigating various optimization problems. The proposed definition of extremality is satisfied by sets corresponding to a broad class of «almost optimal» points. Extremality conditions are stated in the form of the generalized Euler equation and appear to be necessary and sufficient.

Литература

1. К р у г е р А. Я., М о р д у х о в и ч Б. Ш. Обобщенные нормали и производные и необходимые условия экстремума в задачах недифференцируемого программирования. II. Мн., 1980. Деп. в ВИНИТИ 11.02.80, № 494-80.

2. К р у г е р А. Я., М о р д у х о в и ч Б. Ш. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 8. С. 684—687.

3. К р у г е р А. Я. Обобщенные дифференциалы негладких функций. Мн., 1981. Деп. в ВИНИТИ 25.03.81, № 1332-81.

4. К р у г е р А. Я. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 4. С. 34—39.

5. Д у б о в и ц к и й А. Я., М и л ю т и н А. А. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395—453.

6. Б о л т я н с к и й В. Г. // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 3. С. 3—55.

7. К р у г е р А. Я. Необходимые условия экстремума в задачах негладкой оптимизации. Мн., 1981. Деп. в ВИНИТИ 25.03.81, № 1333-81.

8. К р у г е р А. Я. // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 78—90.

9. К р у г е р А. Я. // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 54—66.

10. М о р д у х о в и ч Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М., 1988.

11. К р у г е р А. Я. Теорема о накрывании для многозначных отображений. Мн., 1985. Деп. в ВИНИТИ 26.06.85, № 4613-85.

12. K r u g e r A. Ya. // Optimization. 1988. Vol. 19, N 6. P. 763—780.

13. К р у г е р А. Я. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 38—43.

14. К р у г е р А. Я. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 3. С. 21—26.

15. Д м и т р у к А. В., М и л ю т и н А. А., О с м о л о в с к и й Н. П. // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 11—46.

Международный институт трудовых и социальных отношений

Поступило 28.01.97